Beiträge zur Verwendung des freien Integrationsweges.

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

eingereicht bei der

hohen philosophischen Facultät

der

Universität Basel

von

Theophil Christen.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Greifswald.
Druck von F. W. Kunike.
1897.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Prof. Dr. H. Kinkelin

spreche ich an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus für alle Anregung, die mir bei der Abfassung dieser Arbeit von seiner Seite zu Teil geworden ist.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548622_0120

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, den Cauchy'schen Satz vom freien Integrationsweg, der sich schon lange als enorm fruchtbar erwiesen hat, noch weiter zu verwerten. Die zur Anwendung gelangenden Methoden machen es möglich, entweder die Resultate auf kürzerem und eleganterem Wege abzuleiten, als dies bisher geschehen ist, oder eine Gruppe verwandter Integrale, die sich in verschiedenen Werken zerstreut finden, unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu behandeln, oder endlich neue Integrale zu berechnen und solche, für welche in andern Arbeiten falche Werte angegeben sind, zu berichtigen.

Den Satz von Cauchy [1]) setze ich in der folgenden Form als bewiesen voraus:

---

1) Zur Entwicklungsgeschichte dieses Theorems vergleiche man folgende Abhandlungen Cauchy's: „Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal." Oeuv. compl. série. 2 tome VI. pag. 23 „De l'influence que peut avoir sur la valeur d'une intégrale définie l'ordre dans lequel on effectue les intégrations." Oeuv., série 2 tome VI page 112. „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires." Separatdruck erschienen 1825.

Ist $z = x + iy$ und besteht zwischen x und y irgend eine Relation, nach welcher ein Punkt mit den Coordinaten x und y auf einer geschlossenen Curve liegt, so ist das Integral

$$\int u(z)\,dz$$

ausgedehnt über den ganzen Umlauf der geschlossenen Curve gleich dem Product von $i2\pi$ in die Summe aller „Résidus" der Function $u(z)$, soweit sich dieselben auf Pole beziehen, die von dem Integrationsweg umschlossen werden.

$$\int u(x)\,dx = i2\pi \sum_{h=1}^{h=n} c_h$$

$$c_h = \lim_{\delta=0} \frac{\partial^{d-1}}{\partial \delta^{p-1}} \{\delta^p \,.\, u(z_h + \delta)\}$$

Die Werte $z_h (h = 1, 2 \,.\,.\,.\, n)$ sind die vom Integrationsweg umschlossenen Pole von $u(z)$ und p ist bestimmt durch die Bedingung

$$0 < \operatorname{mod} \lim_{\delta=0} \delta^p u(z_h + \delta) < \infty$$

wobei selbstverständlich für $p = 1$

$$c_h = \lim_{\delta=0} \delta \,.\, u(z_h + \delta)$$

zu setzen ist.

Es sei noch daran erinnert, dass Cauchy unter

$$\int_{x_1}^{x_2} E^{y_2}_{y_1} \left((u(z)) \right)$$

die Summe aller Résidus versteht, deren Pole innerhalb der Grenzen

$$x_1 < x < x_2$$
$$y_1 < y < y_2$$

liegen.

Schliesst der Integrationsweg keinen Pol der Function $u(z)$ ein, so ist das Integral gleich null.

I. Ableitung einiger Integrale, die mit dem Exponentialintegral verwandt sind.

Die Berechnung des Exponentialintegrales

$$\varphi(a) = \int_a^\infty \frac{e^x}{x}\,dx \qquad (1)$$

geschieht durch Reihenentwicklung. Durch Differentiation der Gleichung (1) nach a kommt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = -\frac{e^{-a}}{a} = -\sum_0^\infty{}_h (-1)^h \frac{a^{h-1}}{h!}$$

woraus durch Integration

$$\varphi(a) = \gamma + \log\left(\frac{1}{a}\right) - \sum_1^\infty{}_h \frac{(-a)^h}{a \,.\, h!} \tag{2}$$

Für den Wert von $\varphi(a)$ habe ich absichtlich den sonst gebräuchlichen Ausdruck

$$\varphi(a) = -\mathfrak{E}(-a)$$

wobei

$$\mathfrak{E}(z) = C^{1}) + \tfrac{1}{2}\lg(z^2) + \sum_1^\infty{}_h \frac{z^h}{h \,.\, h!}$$

vermieden, weil $\mathfrak{E}(z)$ für positive und negative Werte von z eine eindeutig definirte Function ist, während das Glied $\lg\left(\frac{1}{a}\right)$ in Gleichung (2) andeuten soll, dass die Function $\varphi(a)$ für negative Werte von a jegliche Bedeutung verliert, wenn sie, wie hier, durch das bestimmte Integral (1) definirt ist (man müsste dann schon durchaus an dem unglücklichen Begriff der „Valeur principale" festhalten wollen.

Dass die Constante γ dem negativen Wert der Mascheroni'schen Constante[1]) gleich ist, geht aus der folgenden Transformation hervor:

Die Mascheroni'sche Constante[2]) ist definirt als

$$C = \int_0^1 \lg\left(\lg\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^\infty e^{-y} \log y \, dy$$

woraus durch partielle Integration

$$C = -\lim_{\delta=0} \left\{ e^{-\delta}\lg\delta + \int_\delta^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dy \right\}$$

und nach (1)

---

1) Unter C sei durchweg die Mascheronische Constante

$$C = 0,\ 577\ \ 215\ \ 665\ \ldots$$

verstanden; über deren genauen Wert vergl. Crelles Journ. XLIX pag. 375.

2) Mascheroni: Adnotationes ad calc. integ. Euleri (1790) pag. 18.

$$C = -\lim_{\delta=0}\{\log\delta+\varphi(\delta)\} = -\gamma$$

sodass

$$\varphi(a) = \int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = -C+\lg\left(\frac{1}{a}\right) - \sum_1^\infty \frac{(-a)^h}{h\,.\,h!} \tag{4}$$

Man setze jetzt

$$u(z) = \frac{e^{-az}}{1+z}$$

und nehme als Integrationsweg das unendliche grosse Rechteck $0ABC$ (Fig. 1). Innerhalb desselben liegt kein Pol von $u(z)$; das Integral über das Rechteck ist daher gleich null. Die einzelnen Teilintegrale ergeben sich als

$$\int_0^A u\,dz = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x} = e^a\varphi(a)$$

$$\int_A^B u\,dz = \lim_{k=\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-a(k+iy)}}{1+k+iy}\,d(iy) = 0$$

$$\int_B^C u\,dz = -\lim_{h=\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-a(x+ik)}}{1+x+ik}\,dx = 0$$

$$\int_C^0 u\,dz = -i\int_0^\infty \frac{e^{-iay}}{1+iy}\,dy$$

und durch Addition kommt

$$0 = e^a\varphi(a) - i\int_0^\infty \frac{e^{-iay}}{1+iy} \tag{6}$$

Setzt man

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\cos ay}{1+y^2}\,dy, \quad G(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ay}{1+y^2}\,dy \tag{7}$$

so ergiebt Gleichung (6) nach Trennung des reellen Teiles vom imaginären

$$G + \frac{\partial G}{\partial a} = e^a\varphi(a)$$

$$F + \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \tag{9}$$

Die Integration von (9) liefert die längst bekannte Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\cos ay}{1+y^2}\,dy = \int_0^\infty \frac{y \sin ay}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

Von mehr Interesse ist die Differentialgleichung (8), deren Integration [1]), wie man leicht ersieht, auf die Gleichungen

$$G(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ay}{1+y^2}\,dy = \tfrac{1}{2}\{e^{-a}\mathfrak{E}(a) - e^{a}\mathfrak{E}(-a)\} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial G(a)}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{y \cos ay}{1+y^2}\,dy = -\tfrac{1}{2}\{e^{-a}\mathfrak{E}(a) + e^{a}\mathfrak{E}(-a)\} \qquad (11)$$

führt. Die Gleichungen (10) und (11) bleiben für negative Werte von a bestehen, überhaupt sind beide Integrale für alle reellen Werte von a durchaus bestimmt, und deshalb ist die Verwendung der Function $\mathfrak{E}$ die einzig gegebene. Beide Gleichungen sind von mehreren Mathematikern gefunden worden, so von Schlömilch [2]), Arndt [3]), Meyer [4]), doch sind die von ihnen angewandten Methoden nicht so einfach.

Im Folgenden kommen die mit $\mathfrak{E}(z)$ verwandten Reihen

$$\mathfrak{C}(z) = C + \tfrac{1}{2}\lg(z^2) + \sum_1^\infty{}_h \frac{(-z^2)^h}{2h \,.\, (2h)!}$$

$$\mathfrak{S}(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^h z^{2h+1}}{(2h+1) \,.\, (2h+1)!}$$

zur Verwendung. Sie dienen zur Berechnung des Sinus- und des Cosinusintegrales. Man beweist leicht, dass

$$\int_a^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = -\mathfrak{C}(a) \qquad a > 0 \qquad (12)$$

und

---

1) Das vollständige Integral ist

$$G = \gamma \,.\, e^{-a} + \tfrac{1}{2}\{e^{-a}\mathfrak{E}(a) - e^{a}\mathfrak{E}(-a)\}$$

und für $a = 0$ wird $\gamma = 0$.

2) Crelles J. V pag. 204.

3) Ibid. XI pag. 70.

4) Ibid. XLIII pag. 72.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \mathfrak{S}(a) \tag{13}$$

Die Identität der Constanten des Cosinus- und des Exponentialintegrales hat zuerst Arndt[1]) nachgewiesen, indem er die beiden Integrale von einander subtrahirte und zeigte, dass die Differenz verschwindet, wenn a gleich null gesetzt wird.

Auf die Integrale (12) und (13) lässt sich nun durch eine kurze Rechnung die Function

$$\psi(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\, dx \tag{14}$$

zurükführen. Man setze

$$u(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z} \tag{15}$$

und führe das Integral $\int u\, dz$ um das Rechteck $0ABC$ (Fig. 1.) Es ergiebt sich

$$\int_0^A u\, dz = \int_0^\infty \frac{\cos ax + i \sin ax}{1+x}\, dx$$

$$\int_A^B = 0, \quad \int_B^C = 0$$

$$\int_C^0 = -\int_0^\infty \frac{e^{-ay}(y+i)}{1+y^2}\, dy = -i\varphi(a) + \frac{\partial \psi(a)}{\partial a}$$

und durch Addition

$$0 = \psi(a) - \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x}\, dx$$

$$0 = \frac{\partial \psi(a)}{\partial a} + \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x}\, dx$$

Setzt man in beiden Gleichungen

---

1) Grunert's Archiv X pag. 225.

$$x = \frac{y}{a} - 1$$

so erhält man mit Hilfe von (12) und (13)

$$\left.\begin{aligned} \psi(a) &= \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\,dy = \cos a \left\{\frac{\pi}{2} - \mathfrak{S}(a)\right\} + \sin a\, \mathfrak{C}(a) \qquad (16) \\ -\frac{\partial \psi(a)}{\partial a} &= \int_0^\infty \frac{y e^{-ay}}{1+y^2}\,dy = -\cos a \mathfrak{C}(a) + \sin a \left\{\frac{\pi}{2} - \mathfrak{S}(a)\right\} \qquad (17) \end{aligned}\right\} a > 0$$

Zu gleichen Resultaten kommt Schlömilch [1]) auf folgende Art: Man liest direct aus Gleichung (14) ab, dass

$$\frac{\partial^2 \psi(a)}{\partial a^2} + \psi(a) = \frac{1}{a}$$

Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist

$$\psi(a) = \{A - \mathfrak{S}(a)\}\cos a + \{B + \mathfrak{C}(a)\}\sin a$$

Nun stösst aber der exacte Beweis dafür, dass

$$B = 0$$

auf erhebliche Schwierigkeiten, sodass diese anscheinend sehr einfache Ableitung schliesslich doch bedeutend complicirter ausfällt, als die oben angeführte.

II. Integrale von 0 bis ∞ über algebraisch-trigonometrische Functionen.

Es soll zuerst eine allgemeine Integrationsformel abgeleitet werden, umfassend alle Functionen $u(z)$ welche der Bedingung

$$\lim_{k=\infty} k \,.\, e^{i\vartheta} \,.\, u(k e^{i\vartheta}) = A$$

genügen, wobei A endlich und von ϑ unabhängig sein muss, solange ϑ zwischen den Grenzen 0 und π bleibt. Ferner darf $u(z)$ für keinen reellen Wert des Argumentes z unendlich gross werden. Führt man unter diesen Voraussetzungen das Integral $\int u dz$ um das unendlich grosse Rechteck *ABCD*, so wird

---

1) Crelles J. XXXIII pag. 325.

$$\int u\,dz = i2\pi \underset{-\infty}{\overset{\infty}{E}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{(}}(\,u(z)\,)) \tag{19}$$

Die Längen $0B$ und BC sind beliebig verschieden, beide aber unendlich gross; sie seien k und $\varkappa$; dagegen ist vorausgesetzt, dass

$$AO = CB = DP = PC = k$$

Dann wird

$$\int_A^B = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx, \quad \int_B^C = i\int_0^k u(k+iy)\,dy$$

$$\int_C^D = -\int_{-k}^{k} u(x+i\varkappa)\,dx, \quad \int_D^A = -i\int_0^k u(-k+iy)\,dy$$

und nach (18)

$$\int_B^C + \int_B^A = iA_2^3\int_0^k \left\{\frac{1}{k+iy} + \frac{1}{k-iy}\right\} dy$$

$$\int_C^D = -A\int_0^k \left\{\frac{1}{x+i\varkappa} - \frac{1}{x-i\varkappa}\right\} dx$$

woraus durch Addition

$$\int_B^C + \int_C^D + \int_D^A = i2A\,\left\{\pi - \operatorname{arctg}\frac{k}{\varkappa} - \operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{k}\right\}$$

bekanntlich gilt aber für positive x

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

sodass

$$\int u\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx + i\pi A$$

woraus man mit Hilfe von (19) erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx = i\pi\left\{2\underset{-\infty}{\overset{\infty}{E}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{(}}(\,u(z)\,)) - A\right\}$$

Stellt man ferner an die Function u die Forderung

$$u(-x) = u(x) \tag{18a}$$

so kommt aus (20)

$$\int_0^\infty u(x)\,dx = i\pi \left\{ \begin{matrix} \infty & \infty \\ -\infty & 0 \end{matrix} E \quad ((u(z))) - \tfrac{1}{2}A \right\} \text{ [1]} \tag{21}$$

Eine grosse Zahl algebraisch-trigonometrischer Integrale lassen sich aus dieser Gleichung (21) ableiten. Es sei vorausgeschickt, dass die hier zur Behandlung kommenden Integrale sämmtlich den Nenner

$$e^q + e^{-q} - 2\cos px$$

enthalten. Setzt man an dessen Stelle den anderen

$$1 - 2\alpha\cos px + \alpha^2$$

so liegt darin keine principielle Aenderung. Dagegen wird sich zeigen, dass bei Anwendung der zweiten Form die Integrale durch zwei verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt werden müssen, jenachdem $\alpha^2 \gtrless 1$ ist. Diejenigen unter ihnen, die bereits von Anderen gefunden worden sind, werden auch überall doppelt aufgeführt für $\alpha^2 > 1$ und für $\alpha^2 < 1$. Um beide Fälle zugleich behandeln zu können, wähle ich die erste Form des Nenners, aus welchen die zweite dadurch hergestellt wird, dass man die Gleichung mit $e^{\pm q}$ multiplicirt, jenachdem $\alpha^2 \lessgtr 1$ sein soll. Es mögen endlich in diesem Abschnitt zur Vereinfachung die folgenden Beziehungen festgehalten werden

$$p = 2\pi a > 0, \quad q = 2\pi b > 0, \quad r = e^q + e^{-q}$$

1. Die Reihe

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 + b^2}$$

wird summirt durch Auswertung des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{r - 2\cos x} \cdot \frac{dx}{x}$$

---

1) Diese Relation hat auf andere Art bereits Cauchy nachgewiesen; er bringt sie in seiner Abhandlung „Sur quelques relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies. Oeuvres compl. série 2 tome VI pag. 124.

Die Pole der Function

$$u(z) = \frac{\sin z}{r - 2\cos z} \cdot \frac{1}{z} \tag{22}$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$r - 2\cos z = 0$$

Da nur die Pole mit positivem imaginären Teil in Betracht kommen, so sind dieselben enthalten in

$$z_\varkappa = 2\pi(\varkappa + ib)$$

worin $\varkappa$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft. Dann wird

$$e_\varkappa = \frac{\sin z_\varkappa}{z_\varkappa} \cdot \lim_{z=z_\varkappa} \frac{z - z_\varkappa}{r - 2\cos z} = \frac{1}{2z_\varkappa}$$

$$c_0 = \frac{-i}{4\pi b}, \quad c_\varkappa = \frac{1}{4\pi(\varkappa + ib)}, \quad c_{-\varkappa} = \frac{-1}{4\pi(\varkappa - ib)}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} E_0^{\infty}((u)) = \frac{-i}{4\pi}\left\{\frac{1}{b} + 2b\sum_1^{\infty}\frac{1}{\varkappa^2 + b^2}\right\}$$

Ferner ist

$$A = \lim_{k=\infty} \frac{\sin(k \cdot e^{i\vartheta})}{r - 2\cos(ke^{i\vartheta})} = -\frac{i}{2}$$

und nach (21), wenn $x = py$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin py}{e^q + e^{-q} - 2\cos py} \cdot \frac{dy}{y} = \tfrac{1}{4}\left\{-\pi + \frac{1}{b} + 2b\sum_1^{\infty}\frac{1}{\varkappa^2 + b^2}\right\} \tag{23}$$

Dieses Integral hat Plana [1]) nach einer andern Methode berechnet, die ich kurz andeuten will. Es ist

$$x \cdot u(x) = \frac{e^{-q}\sin x}{(1 - e^{-q+ix})(1 - e^{-q-ix})} = \sum_1^{\infty} e^{-\varkappa q}\sin \varkappa x$$

$$\int_0^{\infty} u(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\,\frac{\pi}{e^q - 1} \tag{23 a}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (23), so erhält man

---

1) Mem. della reale acad. della scienee di Torino 1818 pag. 30.

$$\frac{1}{b}+2b\sum_{1}^{\infty}{}_{x}\frac{1}{x^2+b^2}=\pi\frac{e^{\pi b}+e^{-\pi b}}{e^{\pi b}-e^{-\pi b}} \tag{24}$$

Diese ist eine bekannte Reihe, sie entspricht für imaginäre Werte von b der Reihe für die Cotangente

$$b=ia$$

$$\pi\operatorname{ctg}\pi a=\frac{1}{a}-2a\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2-a^2} \tag{24a}$$

Aus (24) leitet man leicht die verwandte Reihe

$$\frac{1}{b}+2b\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^x}{x^2+b^2}=\frac{2\pi}{e^{\pi b}-e^{-\pi b}} \tag{25}$$

ab, die später Verwendung finden wird.

2. Es sei

$$v(z)=\frac{\sin pz}{r-2\cos pz}\cdot\frac{z}{1+z^2}$$

Die Pole, deren Résidus unter die Summe $\sum_{-\infty}^{\infty}E_{0}^{\infty}((u))$ fallen, sind

$$az_x=x+ib$$

und

$$z'=i$$

Sind die entsprechenden Résidus c_x und c', so ist

$$\sum_{-\infty}^{\infty}E_{0}^{\infty}((u))=c'+c_0+\sum_{1}^{\infty}(c_x+c_{-x})$$

Berechnet man die einzelnen Résidus und definirt

$$F(x,b\,a)=\frac{x^2+b^2-a^2}{x^4+2(b^2+a^2)x^2+(b^2-a^2)^2} \tag{26}$$

so geht (25) über in

$$\sum_{-\infty}^{\infty}E_{0}^{\infty}((u))=-\frac{i}{4\pi}\left\{\pi\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+e^{-p}-e^q-e^{-q}}+\frac{b}{b^2-a^2}+2b\sum_{1}^{\infty}F(x,b,a)\right\}$$

endlich ist

$$A=\lim_{k=\infty}\frac{\sin(pke^{i\vartheta})}{r-2\cos(pke^{i\vartheta})}=-\frac{i}{2}$$

sodass nach (21)

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin px}{e^q+e^{-q}-2\cos px}\cdot\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{4}\left\{\pi\frac{e^q+e^{-q}-2e^{-p}}{e^p+e^{-p}-e^q-e^{-q}}+\frac{b}{b^2-a^2}+2b\sum_{1}^{\infty}F(x,b,ia)\right\} \tag{27}$$

Ueberträgt man die von Plana benutzte Methode auf dieses Integral, so kommt

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi/2}{e^{p+q} - 1} \tag{27a}$$

Diese Gleichung liefert mit (27) zusammen die Summe der Reihe:

$$\frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_1^\infty F(x, b, a) = \pi \frac{e^q - e^{-q}}{e^q + e^{-q} - e^p - e^{-p}} \tag{28}$$

Die Entwicklungen der Paragraphen 1. und 2. dienten dazu, die Summenformeln (24) und (28) abzuleiten; in den folgenden Abschnitten werden auf Grund der genannten Formeln weitere Integrale berechnet. Aus (28) erhält man für $b = 0$ (nachdem man vorerst durch b dividirt hat.)

$$\sum_1^\infty \frac{x^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^2} = \tfrac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2 \right\} \tag{28a}$$

und mit Hülfe von (24)

$$\sum_1^\infty \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} = \left(\frac{\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{4\pi a} - 1 \right\} \tag{29}$$

und

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \left\{ \left(\frac{\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{4\pi a}\right) - \frac{1}{2a^2} \right\} \tag{30}$$

Für das hier berechnete Integral (27a) giebt die Láska'sche Sammlung [1]) einen falschen Wert an, indem dort steht

$$\int_0^\infty \frac{\sin rx}{1 - 2p\cos rx + p^2} \cdot \frac{x\,dx}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{rq}}{(1+p)(e^{2qr} - p)} \qquad p < 1$$

mit Angabe der Quelle „Legendre Exerc. 4, 132". Ebenso ist der Fall $p > 1$ nach Ohm [2]) falsch citirt. Die beiden angeführten Stellen enthalten das Integral so, wie es sich aus meiner Formel (27a) ergiebt, wenn man dieselbe mit e^{-rq} multiplicirt und die Substitution

---

1) Dr. O. Láska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik pag. 254, 111.

2) Ohm, Auswertungsmethoden bestimmter Integrale pag. 161.

$$x = \frac{y}{s}$$

$$p = s \cdot p'$$

einführt. Ebenso muss die Formel 101 auf pag. 253. des genannten Buches corrigirt werden, indem für den Fall $p > 1$ in den Nenner nicht $1-p$, sondern $p-1$ zu stehen kommt. Man vergleiche meine Formel (23a), indem man in derselben beiderseits im Nenner mit e^q multiplicirt.

Ueber die Summen (29) und (30) sei noch bemerkt, dass aus ihnen durch Differentiation nach a die Summen

$$\sum_1^\infty \frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n} \qquad m < n$$

bis zu beliebig hohen Werten von m und n berechnet werden können.

3. Die drei Functionen

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r-\cos pz} \cdot \frac{1}{1+z^2} \\ u_2 &= \frac{\cos px}{r-2\cos pz} \cdot \frac{1}{1+z^2} \\ u_2 &= \frac{1-e^{\gamma q}\cos pz}{r-2\cos pz} \cdot \frac{1}{1+z^2} \quad \gamma = \pm 1 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

liefern die Integrale

$$J_1 = \int_0^\infty u_1(x)dx, \quad J_2 = \int_0^\infty u_2(x)du, \quad J_3 = \int_0^\infty u_3(x(dx)$$

von denen das dritte leicht nach der Plana'schen Methode berechnet wird, zugleich aber auch direct aus J_1 und J_2 sich ergiebt und daher für diese eine Controle liefert.

Alle drei Functionen haben die nämlichen Pole:

$$z' = i$$

$$az_x = x + ib \qquad -\infty < x < \infty$$

Eine weitere gemeinsame Eigenschaft ist

$$A = 0$$

Für alle drei gilt daher

$$J = i\pi \left\{c' + c_0 + \sum_1^\infty (c_x + c_{-x})\right\}$$

Für u_1 erhält man

$$c' = \frac{i}{2}\,\frac{1}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}}$$

$$c_0 + \sum_1^\infty (c_\varkappa + c_{-\varkappa}) = -\frac{i}{2\pi}\cdot\frac{1}{e^q - e^{-q}}\left\{\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a\sum_1^\infty F(\varkappa, a, b)\right\}$$

man vergleiche die Definition (26) und berechne die Summe über $F(\varkappa, a, b)$ nach (28), indem dort a und b und dementsprechend p mit q zu vertauschen ist.

Für u_2 berechnet man

$$c' = \frac{i}{4}\,\frac{e^p + e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}}$$

$$c_0 + \sum_1^\infty (c_\varkappa + c_{-\varkappa}) = -\frac{i}{4\pi}\cdot\frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}}\left\{\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a\sum_1^\infty F(\varkappa, a, b)\right\}$$

und mit Hilfe von (28) wird jetzt

$$J_1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^q - e^{-q}}\cdot\frac{e^{p+q} + 1}{e^{p+q} - 1}$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^q - e^{-q}}\cdot\frac{e^p + e^q}{e^{p+q} - 1}$$

$$J_3 = J_1 - e^{\gamma p} J_2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\gamma q}}{1 - e^{\gamma(p+q)}}$$

Alle drei Integrale lassen sich noch etwas verallgemeinern, wenn man $\frac{x}{s}$ an Stelle von x und $p \cdot s$ an Stelle von p setzt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^q + e^{-q} - 2\cos px}\cdot\frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s}\cdot\frac{1}{e^q - e^{-q}}\cdot\frac{e^{ps+q} + 1}{e^{ps+q} - 1} \qquad (32)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px}\cdot\frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s}\cdot\frac{1}{e^q - e^{-q}}\cdot\frac{e^{ps} + e^q}{e^{ps+q} - 1} \qquad (33)$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{\gamma q}\cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px}\cdot\frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s}\cdot\frac{e^{\gamma q}}{1 - e^{\gamma(ps+q)}},\quad \gamma = \pm 1 \qquad (34)$$

Das Integral (32) hat bereits Bigler [1]) berechnet und zwar eben-

1) Grunert's Archiv, 2. Reihe IX pag. 81.

falls nach der Methode der Veränderung des Integrationsweges, wenngleich auf etwas andere Art. Gleichung (34) indessen stimmt überein mit einem Resultate, welches viel früher schon Boncompagni [1]) gefunden hat nach der Plana'schen Methode: Man beweist leicht, dass

$$\frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}=\sum_1^\infty \alpha^x\cos xpx$$

wonach

$$\int_0^\infty \frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+{}^2\alpha}\cdot\frac{dx}{s^2+x^2}=\frac{\pi}{2s}\sum_1^\infty \alpha^x e^{-xps}=\frac{\pi}{2s}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{-ps}}$$

Dieses Resultat unterliegt jedoch der Beschränkung

$$\alpha^2<1$$

weil die Reihe $\Sigma\alpha^x\cos xpx$ divergirt, sobald α^2 die Grenze 1 erreicht. Dagegen hätte Boncompagni leicht auch den Wert des Integrales für $\alpha^2>1$ finden können, wenn er an Stelle seiner Reihe die andere

$$\frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}=-\sum_1^\infty\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x\cos xpx \qquad \alpha^2>1$$

verwendet hätte; man erhält mit deren Hilfe [2])

$$\int_0^\infty \frac{1-\alpha\cos px}{1-2\alpha\cos px+\alpha^2}\cdot\frac{dx}{s^2+x^2}=-\frac{\pi}{2s}\cdot\frac{1}{\alpha e^{ps}-1} \qquad \alpha^2>1$$

Ein anderes bekanntes Integral leitet man aus (34) ab, indem man dort $e^{\gamma q}=\frac{1}{\sigma}$ setzt und nach σ integrirt:

$$\int_0^\infty \log\{1-2\sigma\cos px+\sigma^2\}\cdot\frac{dx}{s^2+x^2}=\frac{\pi}{s}\lg\{C\cdot(\sigma-e^{\gamma ps})\},$$

$$\gamma=\pm 1 \text{ jenachdem } \sigma^2\lessgtr 1$$

Es ist zu erwarten, dass C zwei verschiedene Werte hat, jenachdem $\sigma\gtrless 1$. Es sei $\sigma<1$, $\gamma=1$, so findet man für

$$\sigma=0$$

---

1) Crelle's J. XXV, pag. 93.

2) Ohm, Auswertungsmethoden etc. § 26.

$$0 = \frac{\pi}{s} \lg\{-Ce^{ps}\}, \quad C = -e^{-ps}$$

$$\int_0^\infty \lg\{1 - 2\sigma\cos px + \sigma^2\} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{s}\lg(1-\sigma e^{-ps}), \quad \sigma^2 < 1 \tag{35}$$

Von dieser Gleichung subtrahire man die Identität

$$\int_0^\infty \lg(\sigma^2) \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{s}\lg\sigma$$

so ergiebt sich, wenn man $\frac{1}{\sigma}$ durch τ ersetzt,

$$\int_0^\infty \lg\{1 - 2\tau\cos px + \tau^2\} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{s}\lg(\tau - e^{-ps}), \quad \tau^2 > 1 \tag{35a}$$

Eine ganze Serie weiterer Integrale lässt sich aus den Gleichungen (32) und (33) ableiten. Es wurde schon einmal die bekannte Reihe

$$\frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} = \sum_1^\infty e^{-xq}\sin xpx \tag{36}$$

citirt. Nach dieser Reihe entwickle man die linken Seiten der Gleichungen (32) und (33), die rechten dagegen nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \Sigma x x^x \qquad x^2 < 1$$

beide nach Potenzen von e^{-q}. Man überzeugt sich leicht, dass beide Reihen unbedingt convergent sind; die Coefficienten gleicher Potenzen von e^{-q} müssen daher alle links und rechts übereinstimmen.

Die Berechnung der Coefficienten führt auf die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2x+1)px}{\sin px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps} + e^{-ps} - 2e^{-(2x+1)ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \tag{37}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2xpx}{\sin px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{2 - 2e^{-2xps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \tag{38}$$

$$\int_0^\infty \sin(2x+1)px \cdot \operatorname{ctg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{2 - (e^{ps} + e^{-ps})e^{-(2x+1)ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \tag{39}$$

$$\int_0^\infty \sin 2\varkappa px \operatorname{ctg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}+e^{-ps}}{e^{ps}-e^{-ps}}\{1-e^{-2\varkappa ps}\} \qquad (40)$$

Von diesen Gleichungen finden sich (37) und (38) bei Legendre [1]) und Cauchy [2]).

Zwei weitere bemerkenswerte Integrale liefert die Addition resp. Subtraction der Gleichungen (32) und (33):

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 \frac{px}{2}}{e^q+e^{-q}-2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{4s} \cdot \frac{1}{1-e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps}+1}{e^{ps+q}-1} \qquad (41)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{px}{2}}{e^q+e^{-q}-2\cos px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{4s} \cdot \frac{1}{1+e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps}-1}{e^{ps+q}-1} \qquad (42)$$

Anstatt aus diesen Gleichungen durch Reihenentwicklung, wie aus (32) und (33), neue abzuleiten, kann man einfacher verfahren, indem man unter den Gleichungen (37) — (40) die entsprechenden addirt oder subtrahirt.

Die Additionen (37) + (39) und (38) + (40) ergeben keine neuen Gleichungen, sondern bloss Specialfälle der Gleichung (40). Dagegen erhält man durch die Subtractionen (37) — (39) und (38) — (40), nachdem man noch $2p$ an Stelle von p gesetzt hat,

$$\int_0^\infty \sin(4\varkappa+2)px \cdot \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}-e^{-ps}}{e^{ps}+e^{-ps}} \cdot \{1+e^{-(4\varkappa+2)ps}\} \qquad (43)$$

$$\int_0^\infty \sin 4\varkappa px \cdot \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = -\frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}-e^{-ps}}{e^{ps}+e^{-ps}} \cdot \{1-e^{-4\varkappa ps}\} \qquad (44)$$

Die Natur des Integrals (42) gestattet (im Gegensatz zu den anderen Integralen dieses Abschnittes) $s = 0$ zu setzen:

---

1) Exerc. 5. 36.

2) Sav. Etr. 1827 pag. 1; vergl. auch Liebrecht „Ueber einige best. Int." Grunert's Archiv LIX pag. 218.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{e^q - e^{-q}} \tag{45}$$

Doch scheint es mir aus verschiedenen Gründen wünschenswert, dass für die Formel (45) noch ein besonderer Beweis erbracht werde.

Es sei daher

4.

$$u(z) = \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{r - 2\cos z} \cdot \frac{1}{z^2}$$

Hier ist $A = 0$

Die Pole sind

$$z_\varkappa = 2\pi(\varkappa + ib), \qquad -\infty < \varkappa < \infty$$

$$i\pi \sum_{-\infty}^{\infty} E_0^{\infty}((u)) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^q - 1}{e^q + 1} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot \left\{\frac{1}{b^2} - 2\sum_1^\infty \frac{(\varkappa^2 + b^2)^2}{\varkappa^2 - b^2}\right\}$$

und nach (28a)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}}$$

woraus man (45) erhält, indem man px an Stelle von x setzt.

Entwickelt man jetzt auch Gleichung (45) links in die Reihe (36) und rechts in die geometrische Reihe und vergleicht die Coefficienten gleich hoher Potenzen von e, so kommt

$$\int_0^\infty \sin(4\varkappa + 2)px \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{x^2} = \pi \cdot p \tag{46}$$

$$\int_0^\infty \sin 4\varkappa px \cdot \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{x^2} = 0 \tag{47}$$

Wie zu erwarten war, erweisen sich diese Gleichungen als übereinstimmend mit (43) und (44).

Für $\varkappa = 0$ liefert Gleichung (46)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 px}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} p \tag{48}$$

Aus (47) kommt für $\varkappa = 1$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\, dx - \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\, dx = 0$$

dazu giebt (48)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot p$$

sodass

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 px}{x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} p \tag{49}$$

Jetzt setze man $\varkappa = 1$ in (46) und löse $\sin 6px$ auf nach Potenzen von $\sin px$ und $\cos px$. Benützt man dazu die beiden Gleichungen (49), so kommt

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^6 px}{x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 px \cos^4 px}{x^2}\, dx = \frac{3\pi}{16} \cdot p \\ \int_0^\infty \frac{\sin^4 px \cos^2 px}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{16} \cdot p \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Analog findet man weiter

$$\int_0^\infty \frac{\sin^8 px}{x^2}\, dx = \frac{5\pi}{16} \cdot p, \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \tag{51}$$

Nach dieser Methode berechnet man successive eine beliebige Anzahl Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \sin^{2m} px \cdot \cos^{2n} px \cdot \frac{dx}{x^2} \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, 3 \ldots \\ n = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix} \tag{52}$$

5. Durchaus analoge Relationen bestehen für die Function

$$u(z) = \frac{\sin \frac{z}{2}}{r - 2\cos z} \cdot \frac{z}{2} \tag{53}$$

Es wird

$$A = 0$$

die Pole sind

$$z_\varkappa = 2\pi(\varkappa + ib)$$

$$\Sigma c_\varkappa = -\frac{i}{4\pi}\,\frac{1}{e^{\pi b}+e^{-\pi b}}\left\{\frac{1}{b}+2b\sum_1^\infty\frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa^2+b^2}\right\}$$

und nach (25), wenn man noch x durch $p\,.\,x$ ersetzt,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{px}{2}}{e^q+e^{-q}-2\cos px}\,.\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{e^q-e^{-q}} \tag{54}$$

Hieraus ist weiter

$$\sum_1^\infty e^{-\varkappa q}\int_0^\infty\frac{\sin 2\varkappa px}{\cos px}\,.\,\frac{dx}{x} = \pi\sum_1^\infty e^{-(2\varkappa+1)q}$$

und, weil beide Reihen unbedingt convergiren,

$$\int_0^\infty\frac{\sin(4\varkappa+2)px}{\cos px}\,\frac{dx}{x} = \pi \tag{55}$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin 4\varkappa px}{\cos px}\,\frac{dx}{x} = 0 \tag{56}$$

Vergleicht man die beiden letzten Gleichungen mit (46) und (47), so sieht man leicht ein, dass allgemein gelten muss

$$\int_0^\infty \sin^{2n+1}px\,.\,\cos^{2m}px\,.\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{p}\int_0^\infty \sin^{2m+2}px\cos^{2m}px\,.\,\frac{dx}{x^2} \tag{57}$$

$$m = 0,\ 1,\ 2\ .\ .\ .\qquad n = 0,\ 1,\ 2\ .\ .\ .$$

6.

$$u(z) = \frac{\cos\frac{pz}{2}}{r-2\cos pz}\,.\,\frac{1}{1+z^2} \tag{58}$$

$$A = 0$$

Der Integrationsweg umschliesst zweierlei Pole

$$z' = i$$

und

$$az_\varkappa = \varkappa + ib$$

$$c' = \frac{i}{4} \cdot e^p \cdot \frac{e^{p/2} + e^{-p/2}}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

$$c_x = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^x}{e^{q/2} - e^{-q/2}} \cdot \frac{a}{a^2 + (x + ib)^2}$$

$$\Sigma c_x = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{1}{e^{q/2} - e^{-q/2}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty (-1)^x F(x, a, b) \right\}$$

Nun ist nach 28)

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty F(x, a, b) = \pi \frac{e^{2p} - 1}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

Beachtet man ferner, dass

$$F\left(x, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 4F(2x, a, b)$$

so erhält man, wenn für a und b (und dem entsprechend für p und q) ihre halben Werte gesetzt werden,

$$\frac{2a}{a^2 - b^2} + 4a \sum_1^\infty F(2x, a, b) = \pi \frac{e^p - 1}{(e^{p/2} - e^{q/2})(e^{p/2} - e^{-q/2})}$$

Subtrahirt man die erste dieser beiden Summengleichungen von der zweiten, so kommt

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^\infty (-1)^x F(x, a, b) = \pi \cdot e^p \frac{(e^{p/2} - e^{-p/2})(e^{q/2} + e^{-q/2})}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})} \tag{59}$$

Es wird somit

$$i\pi \sum_{-\infty}^{\infty} E^{\infty}_0((u)) = \frac{\pi}{4} e^{p/2} \frac{(e^p - 1)(e^q + 1) - (e^p + 1)(e^q - 1)}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})(e^q - 1)}$$

und, wenn man noch x ersetzt durch $\frac{x}{s}$ und p durch $2ps$

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{e^q + e^{-q} - 2\cos 2px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps+q}}{(e^{2ps+q} - 1)(e^q - 1)} \tag{60}$$

Die Reihenentwicklung liefert hier nichts neues, es ergiebt sich die Legendre'sche Formel (38). Man hätte also, nachdem einmal (38) gefunden war, das Integral (60) nach der Reihe (36) entwickeln und mit Hilfe der genannten Formel auf den analytischen Ausdruck

(60) bringen können; doch habe ich die directe Berechnung wiedergegeben wegen der Analogie mit dem nächstfolgenden Integral, welches sich auf dem angedeuteten Wege nicht berechnen lässt.

7.

$$u(z) = \frac{\sin\frac{pz}{2}}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{z}{1+z^2}$$

$$A = 0$$

Pole: $z' = i, \quad az_\varkappa = \varkappa + ib$

$$c' = -\frac{i}{4} e^{p/2} \frac{e^p - 1}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

$$c_\varkappa = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^\varkappa}{e^{\pi b} + e^{-\pi b}} \cdot \frac{-b + i\varkappa}{a^2 + (\varkappa + ib)^2}$$

$$\Sigma c_\varkappa = \frac{1/4}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \left\{ \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_1^\infty \varkappa (-1)^\varkappa F(\varkappa, b, a) \right\}$$

und nach (59), wenn man wieder x durch $\frac{x}{s}$ und p durch $p \cdot s$ ersetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{1/2 ps + q}}{(e^q + 1)(e^{ps+q} - 1)} \tag{61}$$

Die bei den anderen Integralen angewandte Reihenentwicklung liefert die Gleichungen

$$\int_a^\infty \frac{\sin(4\varkappa + 2)px}{\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2 + x^2} = \pi \cdot \frac{1 + e^{-(4\varkappa+2)ps}}{e^{ps} + e^{-ps}} \tag{62}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 4\varkappa px}{\cos px} \cdot \frac{x\,dx}{s^2 + x^2} = -\pi \cdot \frac{1 - e^{-4\varkappa ps}}{e^{ps} + e^{-ps}} \tag{63}$$

Der Fall $s = 0$ ist zwar durch diese letzte Entwicklung nicht streng bewiesen, doch bleiben die Gleichungen (61) — (63) für diesen Grenzwert bestehen, wie aus der besonderen Behandlung desselben unter 5. ersichtlich ist. Die Gleichungen (45) — (47) stellen sich in der Tat dar als Specialfälle der Gleichungen (61) — (63).

Endlich können nicht nur aus (62) und (63), sondern auch aus den Gleichungen (37) — (40), (43) und (44) nach dem auf (46) und (47)

angewandten Verfahren die entsprechenden Integrale abgeleitet werden, welche anstatt sin und cos der Vielfachen von px die Potenzen von sin und cos enthalten.

8. Setzt man allgemein

$$u(z) = \frac{\left.\begin{matrix}\sin^n \\ \cos^n\end{matrix}\right\}(tz)}{e^{q} + e^{-q} - 2\cos pz} \cdot \frac{\varphi^l(z)}{f^m(z)} \tag{64}$$

wobei $\varphi^l(z)$ eine algebraische Function vom $l$ten Grade $f^m(z)$ eine solche vom $m$ten Grade bedeutet, so kann, wenn alle Nullwerte von $f^m(z)$ bekannt sind, das Integral

$$\int_0^\infty u(x)\,dx$$

immer in eine convergente Reihe entwickelt werden, vorausgesetzt, dass für reelle Werte von x

$$u(-x) = u(x)$$

$$u \,.\, s \leqq 1 \quad \text{und} \quad l < m - 1$$

oder

$$n \,.\, s < 1 \quad \text{und} \quad l = m - 1$$

und dass, solange ϑ innerhalb der Grenzen 0 und π bleibt,

$$A = \lim_{k=\infty} k \,.\, e^{i\vartheta} \,.\, u(k \,.\, e^{i\vartheta})$$

einen bestimmten, endlichen oder verschwindenden, von ϑ unabhängigen Wert besitze.

Aus demselben berechnet man weiter die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varkappa px \,.\, \left.\begin{matrix}\sin^n \\ \cos^n\end{matrix}\right\}(tx)}{\sin px} \cdot \frac{\varphi^l(x)}{f^m(x)}\,dx \tag{64a}$$

mit Hilfe der Reihenentwicklung (36).

III. Summirung einer Gruppe von trigonometrischen Reihen.

Im folgenden Abschnitte bedeute

$$\left.\begin{aligned} T &= \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{N}\, dx, \quad U = \int_0^\infty \frac{e^x \sin \alpha x}{N}\, dx \\ U &= \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{N}\, dx, \quad W = \int_0^\infty \frac{e^x \cos \alpha x}{N}\, dx \\ N &= e^{2x} - 2e^x \cos y + 1 = (e^x - e^{iy})\,(e^x - e^{-iy}) \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Alle vier Integrale lassen sich in trigonometrische Reihen entwickeln, wie folgt

$$U - e^{-iy} T = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^x - e^{iy}}\, dx = \sum_1^\infty e^{i(x-1)y} \int_0^\infty e^{-xx} \sin \alpha x\, dx$$

$$W - e^{-iy}\, V = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{e^x - e^{iy}}\, dx = \sum_1^\infty e^{i(x-1)y} \int_0^\infty e^{-xx} \cos \alpha x\, dx$$

Die unter der Summe stehenden Integrale sind nach der Formel

$$\int_0^\infty e^{-px} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (qx)\, dx = \frac{\begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}}{p^2 + q^2}$$

zu berechnen. Die erste der beiden Gleichungen ergiebt nach Trennung des reellen Teiles vom imaginären

$$U - T \cos y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\cos (x-1)y}{x^2 + \alpha^2}$$

$$T \sin y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\sin (x-1)y}{x^2 + \alpha^2}$$

oder

$$U \cos y - T = \alpha \sum_1^\infty \frac{\cos xy}{x^2 + \alpha^2}$$

$$U \sin y = \alpha \sum_1^\infty \frac{\sin xy}{x^2 + \alpha^2}$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$C = \sum_1^\infty \frac{\cos xy}{x^2 + \alpha^2}, \quad S = \sum_1^\infty \frac{\sin xx}{x^2 + \alpha^2} \tag{66}$$

so wird

$$U\cos y - T = \alpha C, \quad U\sin y = \alpha S$$

und, wie sich durch analoge Rechnung ergiebt,

$$W\cos y - V = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad W\sin y = -\frac{\partial C}{\partial y} \tag{67}$$

Setzt man jetzt

$$u(z) = \frac{\sin \alpha z}{e^z - 1} \tag{68}$$

und führe das Integral $\int u\,dz$ um das unendlich lange Rechteck $0ABC$ (Fig. 3), worin

$$0A = CB = \infty$$
$$0C = AB = y$$
$$2n\pi < y < 2n + 2)\pi$$

so wird

$$\int_0^A u\,dz = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1}\,dx = \alpha \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \tag{68a}$$

$$\int_A^B u\,dz = i \lim_{k=\infty} \int_0^y \frac{\sin \alpha(k + iy)}{e^{k+iy} - 1}\,dy = 0 \tag{68b}$$

$$\int_B^C u \,.\, dz = -\tfrac{1}{2} \int_0^\infty \{\sin\alpha x(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + i\cos x(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\}$$
$$\cdot\, (e^x\cos y - 1 - ie^x\sin y) \,.\, \frac{dx}{N}$$
$$= -\tfrac{1}{4}\{(e_{\alpha y} + e^{-\alpha y})(U\cos y - T) + (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\, W\sin y\}$$
$$+ \frac{i}{2}\{(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})\, U\sin y - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})(W\cos y - V))$$

und nach (66) und (67)

$$\int_B^C u\,dz = -\tfrac{1}{2}\left\{(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) \,.\, \alpha C - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\frac{\partial C}{\partial y}\right\}$$
$$+ \frac{i}{2}\left\{(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) \,.\, \alpha S - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\frac{\partial S}{\partial y}\right\} \tag{68c}$$

Das Integral $\int_C^0 u(z)\,dz$ zerfällt in zwei Gruppen von Teilintegralen: solche auf Halbkreisen mit dem Radius δ um die Pole

$$z_h = i2h\pi \qquad h = 1, 2, 3, \ldots n$$

im negativen Sinn der Drehung — ihre Summe sei $\frac{\pi}{2} \cdot D_{2n}$ — und solche zwischen den Polen auf der Y Achse — ihre Summe sei $R + iS$ —, so dass

$$\int_c^0 u\,dz = R + iS + \frac{\pi}{2} \cdot D_{2n} \tag{68d}$$

Die Radien δ sollen gegen null convergirende Grössen sein.

Nun ist

$$D_{2n} = -i\delta \sum_1^n h \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(z_h + \delta e^{i\vartheta}) e^{i\vartheta}\, d\vartheta$$

wird aber δ verschwindend klein, so geht D_{2h} über in

$$D_{2n} = \sum_1^n (e^{2h\pi\alpha} - e^{-2h\pi\alpha}) = \frac{e^{(2n+1)\pi\alpha} + e^{-(2n+1)\pi\alpha} - e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \tag{69}$$

Sollte y eine der Grenzen erreichen, so wäre der Integrationsweg noch um einen Viertelskreis zu vermindern resp. zu vergrössern. Es soll aber später bewiesen werden, dass die auf diese Weise bestimmten Grenzwerte

$$\begin{aligned} D'_{2n} &= \tfrac{1}{2}(D_{2n-2} + D_{2n}) & y &= 2n\pi \\ D_{2n+2} &= \tfrac{1}{2}(D_{2n} + D_{2n+2}) & y &= (2n+2)\pi \end{aligned} \tag{69a}$$

vollständig zwecklos sind.

Weiter findet man

$$\left.\begin{aligned} R &= -\tfrac{1}{4}\int_0^y (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\,dy = -\frac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y} - 2}{2\alpha} \\ S &= -\tfrac{1}{4}\left\{\int_0^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi+\delta}^{4\pi-\delta} + \ldots \int_{2n\pi+\delta}^{y} (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y})\operatorname{ctg}\tfrac{y}{2}\,dy\right\} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Die Pole der Function (68) sind alle durch den Integrationsweg ausgeschlossen, daher ist

$$\int u\, dz = 0$$

woraus die Trennung des reellen Teiles vom imaginären mit Hilfe der Gleichungen (68) — (70) ergiebt:

$$\tfrac{1}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})\, C - \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2\alpha} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y} - 2}{4\alpha^2} \tag{71}$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha} D_{2n} + \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) S - \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2\alpha} \cdot \frac{\partial S}{\partial y} \tag{72}$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim_{\delta = 0} \left\{ \int_0^{2\pi - \delta} + \int_{2\pi + \delta}^{4\pi - \delta} + \cdots \int_{2n\pi + \delta}^{y} \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2\alpha} \operatorname{ctg} \frac{y}{2} \cdot dy \right\}$$

NB. Gleichung (72) gilt nur für verschwindend kleine Werte von δ [wäre δ endlich, so wäre die Summe D_{2n} nicht reell, sondern enthielte, wie man sich überzeugen kann, imaginäre Glieder, die in (72) auftreten müssten!] Nichtsdestoweniger bleibt das Integral in (72) endlich und bestimmt, da die Pole auf Kreisen umgangen wurden und daher die δ an den Teilstellen gleich sind.

Unter C und S hat man sich nicht die Reihen (66), sondern den analytischen Ausdruck für deren Summe vorzustellen. Dann kann man C und S nach Belieben differentiiren, während die Reihen selbst schon durch die zweite Differentiation divergent werden.

Man differentiire Gleichung (71) nach y; dann nimmt dieselbe folgende einfache Gestalt an

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \alpha^2 C - \tfrac{1}{2} = 0$$

woraus

$$\frac{1}{a} + 2\alpha C = \pi \frac{A_{2n} e^{\alpha y} + B_{2n} e^{-\alpha y}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} \tag{73}$$

Die Constanten A und B wurden von vornherein mit einem Index versehen, da sie von D_{2n} abhängig und also Functionen von n sein müssen. Aus (73) ist

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_{2n} e^{\alpha y} - B_{2n} e^{-\alpha y}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}$$

Setzt man diese Werte von C und $\frac{\partial C}{\partial y}$ ein in (72), so kommt

$$\frac{A_{2n}+B_{2n}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} = D_{2n} + \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa^2+\alpha^2}\right\}$$

und mit Hilfe von (24)

$$A_{2n} + B_{2n} = e^{(n+1)\alpha\pi} + e^{-(2n+2)\alpha\pi}$$

Setzt man ferner in (73) $y = (2n+1)\pi$

so kommt

$$\frac{A_{2n}\, e^{(2n+1)\alpha\pi} + B_{2n}\, e^{-(2n+1)\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^\infty \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa^2+\alpha^2}\right\}$$

und nach (25)

$$A_{2n}\, e^{(2n+1)\alpha\pi} + B_{2n}\, e^{-(2n+1)\alpha\pi} = 2$$

sodass endlich

$$A_{2n} = e^{-(2n+1)\alpha\pi}, \quad B_{2n} = e^{(2n+1)\alpha\pi}$$

wonach (73) übergeht in [1])

$$\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \pi \cdot \frac{e^{\alpha[(2n+1)\pi - y]} + e^{-\alpha[(2n+1)\pi - y]}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} \tag{74}$$

Die Differentiation nach y ergiebt

$$\sum_1^\infty \frac{\varkappa \sin \varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha[(2n+1)\pi - y]} - e^{-\alpha[(2n+1)\pi - y]}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} \tag{75}$$

$$2n\pi < y < (2n+2)\pi$$

Für diese Gleichungen sind die Grenzwerte D_{2n}' und D_{2n}'' ohne Bedeutung; ihnen zufolge wäre

$$A'_{2n} = \tfrac{1}{2}(A_{2n-2} + A_{2n}), \quad B_{2n}' = \tfrac{1}{2}(B_{2n-2} + B_{2n})$$
$$A''_{2n} = \tfrac{1}{2}(A_{2n} + A_{2n+2}), \quad B_{2n}'' = \tfrac{1}{2}(B_{2n} + B_{2n+2})$$

Nun erkennt man aber leicht, dass (74) an den Grenzen gilt, wenn man allgemein

$$A'_{2n} = \frac{pA_{2n-2} + qA_{2n}}{p+q} \text{ etc.}$$

setzt, wobei p und q beliebige Zahlen sind. Allerdings gilt dann die Gleichung nicht mehr streng, d. h. sie gilt unter Umständen nicht mehr an den Grenzen, nachdem man sie differentiirt hat. Es wäre demnach zu erwarten, dass (75) an den Grenzen nur dann bestehen bliebe, wenn

1) Vgl. Schlömilch, „Neue Methode zur Summirung etc." Grunert's Archiv XII, pag 131.

$$p = q = 1$$

Doch ist eine weitere Untersuchung darüber gegenstandslos, da die Summe (75) für die Werte

$$y = m\pi$$

so wie so ihre Bedeutung verliert, wie im Folgenden kurz bewiesen werden soll.

$$S(m\pi) = \lim_{\substack{\delta=0 \\ k=\infty}} \sum_{1}^{k} \frac{x \sin x(m\pi \pm \delta)}{x^2 + \alpha^2}$$

Es besteht zwischen den unendlich kleinen Grössen δ und $\frac{1}{k}$ keine Relation, so dass

$$\beta = \delta \,.\, k$$

eine willkürliche positive Grösse ist

$$S(m\pi) = \pm(-1)^m \lim_{k=\infty} \sum_{1}^{k} \frac{x \sin \frac{x}{k}\beta}{x^2 + \alpha^2} = \pm (-1)^m \int_0^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx$$

$S(m\pi)$ hat also einen unbestimmten Wert, welcher entweder zwischen $-S'$ [1]) und 0 oder zwischen 0 und S' liegt, jenachdem m gerade oder ungerade ist und y gegen die Grenze wächst oder abnimmt. Für

$$p = q = 1$$

erhält man bloss den Specialwert, welchen $S(m\pi)$ annimmt, wenn man willkürlich festsetzt, dass, während y gegen die Grenze $m\pi$ wächst, $\beta = \alpha$, d. h., dass k von einer höheren Ordnung unendlich werden soll, als $\frac{1}{\delta}$, was aber absolut keinen Sinn hat. —

Für die folgende Ableitung nehme man

$$0 < y < 2\pi$$

(worin weiter keine Beschränkung liegt) und integrire Gleichung (74), nachdem man dieselbe durch die Substitution

$$\alpha = 0, \qquad n = 0$$

auf die Form

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2} = \frac{y^2}{4} - \frac{\pi}{2} y + \frac{\pi^2}{6} \tag{74a}$$

---

1) Wobei S' das Maximum der Function $\mathfrak{S}(x)$ bedeutet [vergl. Abschnitt I] nämlich $S(\pi) = 1{,}851\ 936$.

gebracht hat, wiederholt nach y zwischen den Grenzen 0 und y und führe nach der Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa^{2n}} = \tfrac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} \cdot B_{2n}$$

die Bernoulli'schen Zahlen ein. Setzt man endlich noch

$$y = 2\pi x$$

so erhält man allgemein [1])

$$\frac{2\,.\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^\infty \frac{\cos 2\varkappa\pi x}{\varkappa^{2n}} = B_{2n} - \binom{2n}{2} B_{2n-2}\, x^2$$
$$+ \binom{2n}{4} B_{2n-4}\, x^4 - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{2n}{2} B_2 x^{2n-2}$$
$$+ (-1)^n x^{2n-1}\{n - x\} \qquad (76)$$

$$\frac{2\,.\,(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \cdot \sum_1^\infty \frac{\sin 2\varkappa\pi x}{\varkappa^{2n+1}} = \binom{2n+1}{1} B_{2n}\, x - \binom{2n+1}{3} B_{2n-2}\, x^3$$
$$+ \binom{2n+1}{5} B_{2n-4}\, x^5 - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{2n+1}{2} B_2 x^{2n-1}$$
$$+ (-1)^n x^{2n} \left\{\frac{2n+1}{2} - x\right\} \qquad (77)$$
$$0 < x < 1$$

Setzt man in (76) $x = \frac{1}{2}$, so geht die linke Seite über in die Summe

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa^{2n}}$$

welche, wie man leicht beweist, den Wert

$$-B_{2n}\,\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}$$

hat, man erhält somit aus (76) die folgende Recursionsformel für die Bernoulli'schen Zahlen

$$2(2^{2n}-1)\,B_{2n} = \binom{2n}{2} 2^{2n-2} B_{2n-2} - \binom{2n}{4} 2^{2n-4} B_{2n-4} + \binom{2n}{6} 2^{2n-6} B_{2n-6}$$
$$- \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2} 2^2 B_2 + (-1)^{n+1}\{2n-1\} \qquad (78)$$

Es lassen sich ferner für die Reihen

---

1) cf. Raabe, Crelle's J. XLII, pag. 348.

$$C_n = \sum_1^\infty \frac{\cos xy}{x^n}, \quad S_n = \sum_1^\infty \frac{\sin xy}{x^n} \tag{79}$$

eine Serie von Recursionsformeln aufstellen durch Integration der Function

$$u(z) = \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} \tag{80}$$

über den Umfang des Rechteckes $0ABC$ (Fig. 3.)

Da, wie schon bemerkt, in der Bedingung

$$0 < y < 2\pi$$

keine wesentliche Beschränkung liegt, so soll dieselbe im Folgenden gelten; es ist übrigens nach den für die Function (68) angestellten Betrachtungen nicht schwer, zu dem allgemeinen Fall $2n\pi < y < (2n+2)\pi$ überzugehen.

Die Teilintegrale stellen sich dar als

$$\int_0^A u\,dz = \sum_1^\infty \int_0^\infty e^{-xn}\, x^{2n-1} = (2n-1)!\, \sum_1^\infty \frac{1}{x^{2n}} = \tfrac{1}{2}\, \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2n}$$

$$\int_A^B u\,dz = 0$$

$$\int_B^C u\,dz = -\int_0^\infty \frac{(x+iy)^{2n-1}(e^{x-iy}-1)}{e^{2x} - 2e^x \cos y + 1}\,dx$$

$$\int_C^0 u\,dz = -\frac{i}{2}\int_0^y \frac{(iy)^{2n-1}\,(e^{-iy}-1)}{1-\cos y}\,dy$$

und, weil der Integrationsweg keinen Pol umschliesst,

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2n} = \int_0^\infty (x+iy)^{2n-1}(e^x \cos y - 1 - 2e^x \sin y)\,\frac{dx}{N}$$

$$+(-1)^{n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\left\{\frac{y^{2n}}{2n} + i\int_0^y y^{2n-1} \operatorname{ctg}\frac{y}{2}\,dy\right\}$$

wobei

$$N = e^{2x} - 2e^x \cos y + 1$$

Zur Ausführung des Integrals $\int_0^\infty$ setze man

$$F_m = \int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{N}, \quad G_m = \int_0^\infty \frac{e^x x^m\,dx}{N}$$

Dann erhält man analog der am Anfang dieses Abschnittes für die Integrale T und U ausgeführten Rechnung

$$G_m \cos y - F = \frac{m!}{\pi^{m+1}} \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{m+1}}$$

$$G_m \sin y = \frac{m!}{\pi^{m+1}} \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{m+1}}$$

wonach schliesslich

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}\frac{B_{2n}+(-1)^n y^{2n}}{} &= \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n}} - \frac{y^2}{2!}\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-2}} + \cdots \\ &+ y\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-1}} - \frac{y^3}{3!}\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-3}} + \cdots \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \left\{ \frac{y^{2h}}{(2h)!} C_{2n-2h} + \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} S_{2n-2h-1} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\int_1^y t^{2n-1}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot dt &= \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n}} - \frac{y^2}{2!}\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^{2n-2}} \\ &+ \cdots - y\sum_1^\infty \varkappa \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-1}} + \frac{y^3}{3!}\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa y}{\varkappa^{2n-3}} - \cdots \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \left\{ \frac{y^{2h}}{(2h)!} S_{2n-2h} - \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} C_{2n-2h-1} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Will man zu dem allgemeinen Fall $2m\pi < y < (2m+2)\pi$ übergehen, so ist der Integrationsweg, wie im letzten Beispiel, um die entsprechenden Halbkreise (Fig. 3) zu vergrössern. Es ist dann in (81) rechts das Glied

$$E_{2m} = (-1)^n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{h=1}^{m} h^{2n-1}$$

$$2m\pi < y < (2m+2)\pi$$

hinzuzufügen. Eine Bestimmung von Grenzwerten für E_{2m} wäre auch hier völlig zwecklos, da (81) immer das Glied $\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa}$ enthält, welches an den Grenzen unbestimmt wird. In (82) hat diese Erweiterung nicht viel Sinn, da, wie in (72) ein unbequemer Grenzwert auftritt.

Die Recursionsformeln (81) und (82) können zugleich als Differentialgleichungen der Functionen C_n und S_n angegeben werden, deren Lösungen in der Hälfte der Fälle, nämlich für C_{2n} und S_{2n+1} durch die Gleichungen (76) und (77) gegeben sind.

Transcendente höherer Ordnung sind die Functionen S_{2n} und C_{2n+1}. Einzig C_1 wird durch eine verhältnissmässig einfache Function dargestellt. Es ergiebt sich aus (82) für $n = 1$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^x t \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot dt = \sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2} - x\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = \int C_1\, dx - xC_1 + \text{const}$$

Man differentiirt nach x:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad C = \gamma - \lg\left(\sin\frac{x}{2}\right)$$

für $x = \pi$ wird

$$\gamma = -\{1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots\} = \lg \tfrac{1}{2}$$

$$C_1 = \sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = -\lg\left(2\sin\frac{x}{2}\right) \quad 0 < x < 2\pi$$

Die Beschränkung $0 < x < 2\pi$ fällt weg, wenn man schreibt

$$\sum_1^\infty \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} = -\tfrac{1}{2}\lg\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right) \tag{83}$$

Hieraus kommt durch Integration von 0 bis x

$$\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2} = -\frac{x}{2}\lg\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\int_0^x t \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot dt \tag{84}$$

Es ist also bereits S_2 nicht mehr durch einfache analytische Functionen auszudrücken. Die numerische Berechnung geschieht

wohl am besten mit Hilfe der Kinkelin'schen Function $G(x)$ [1]), welche für ganzzahlige Argumente der Function

$$G(n+1) = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \ldots n^n$$

entspricht. Es wird

$$\pi \int_0^x t \operatorname{ctg} \pi t \cdot dt = x \lg (2 \sin \pi x) - \lg \frac{G(1-x)}{Gx} \qquad (84a)$$

Diese Formel empfiehlt sich zur Berechnung von S_2, da für den Logarithmus der Function G rasch convergente Reihen existiren, welche denjenigen für $\lg \Gamma$ sehr ähnlich sind. Die Berechnung kann mit sehr grosser Genauigkeit ausgeführt werden, da die Constanten dieser Reihen

$$S_h = \sum_1^\infty \frac{1}{x^h}$$

bis zu S_{70} auf 30 Decimalen berechnet worden sind [2]).

In Gleichung (87) giebt die Substitution $y = \pi$

$$(2^{2n}-1) B_{2n} - \binom{2n}{2} (2^{2n-3}-1) B_{2n-2} + \binom{2n}{4} (2^{2n-5}-1) B_{2n-4} - \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1} \binom{n}{2} B_2 + \frac{(-1)^n}{2} = 0 \qquad (81a)$$

Dividirt man jetzt Gleichung (78) durch 2 und subtrahirt sie von (81a), so kommt, wenn man noch $n+1$ an Stelle von n setzt,

$$\binom{2n+2}{2} B_{2n} - \binom{2n+2}{4} B_{2n-2} + \ldots - + (-1)^n \cdot n = 0 \qquad (85)$$

Diese Formel ist der einfachste Specialfall einer allgemeineren, von Arndt [3]) gefundenen Formel

$$\frac{x-1}{2} = \binom{x+1}{2} B_2 - \binom{x+1}{4} B_4 + \ldots + (-1)^{\frac{x-\mu-1}{2}} \binom{x+1}{x-\mu+1} B_{x-\mu+1}$$

für

$$x = 2n+1, \quad \mu = 2$$

---

1) Kinkelin, Ueber eine neue mit der Γ Function verwandte Transcendente etc. Crelles J. LVII, pag. 122.

2) Stieljes, Tables des valeurs des sommes S_h. Acta math. IX, 299.

3) Crelles J. XXXI, pag. 249.

Es ist dies die einfachste aller bis jetzt gefundenen Recursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen, soviel deren von Schlömilch [1]), Göpel [2]), Dienger [3]), Malmstén [4]), Worpitzky [5]) und Anderen aufgestellt worden sind.

Ganz anderer Natur, als die Lösung der Differentialgleichung (71), an welche sich die vorstehenden Betrachtungen anknüpften, ist diejenige von (72), deren vollständiges Integral

$$4\alpha S = -e^{\alpha y}\int_p^y e^{-\alpha t}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt + e^{-\alpha y}\int_q^y e^{\alpha t}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt \qquad (86)$$

ist, wobei p und q die zwei willkürlichen Constanten sind. Dieselben lassen sich auf zwei verschiedene Arten bestimmen. Man erhält entweder

$$4\alpha\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2} = \int_y^\pi \{e^{\alpha(y-t)} - e^{-\alpha(y-t)}\}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt$$

$$+2\{e^{\alpha(\pi-y)} - e^{-\alpha(\pi-y)}\}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{\varkappa+1}\,.\,\varkappa}{\varkappa^2+\alpha^2} \qquad (86a)$$

oder man schreibt den folgenden Grenzwert

$$4\alpha\sum_1^\infty \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^3+\alpha^2} = \lim_{\delta=0}\left\{-\int_\delta^p [e^{\alpha(y-t)} - e^{-\alpha(y-t)}]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt\right.$$

$$\left. + \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}\,.\int_\delta^\pi [e^{\alpha(\pi-t)} - 2^{-\alpha(\pi-t)}]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.\,dt\right\} \qquad (86b)$$

Für beide Formeln ergiebt sich die Ableitung aus (86) mit Leichtigkeit. Jedoch muss ich an dieser Stelle von einer Behandlung der Function

$$S = \sum_1^\infty \,.\, \frac{\sin \varkappa y}{\varkappa^2+\alpha^2}$$

in extenso absehen, da sie zu weit vom eigentlichen Thema dieses Aufsatzes ablenken würde.

---

1) Grunert's Archiv III., pag. 9.

2) ibid. III, pag. 64.

3) Crelle's J. XXXIV, pag. 75.

4) ibid. XXXV, pag. 59.

5) ibid. XCIV, pag. 203.

Fig. 1.

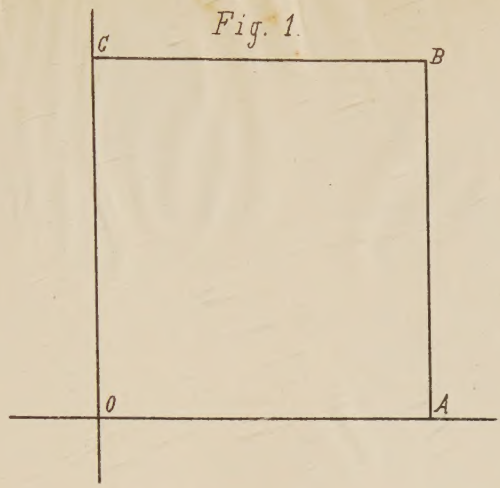

Fig. 2.

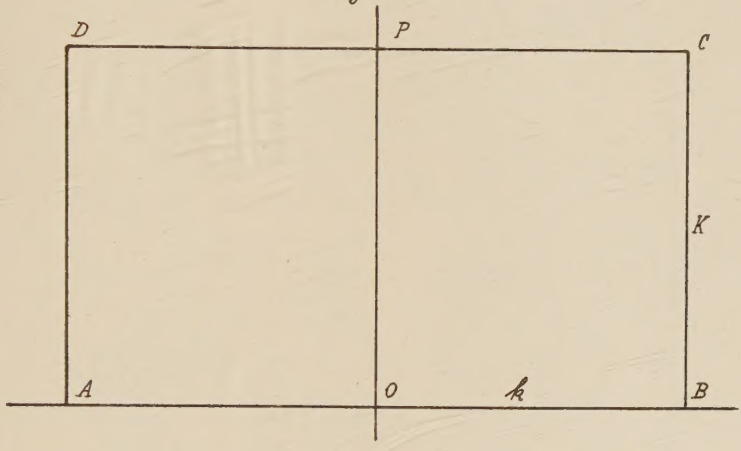
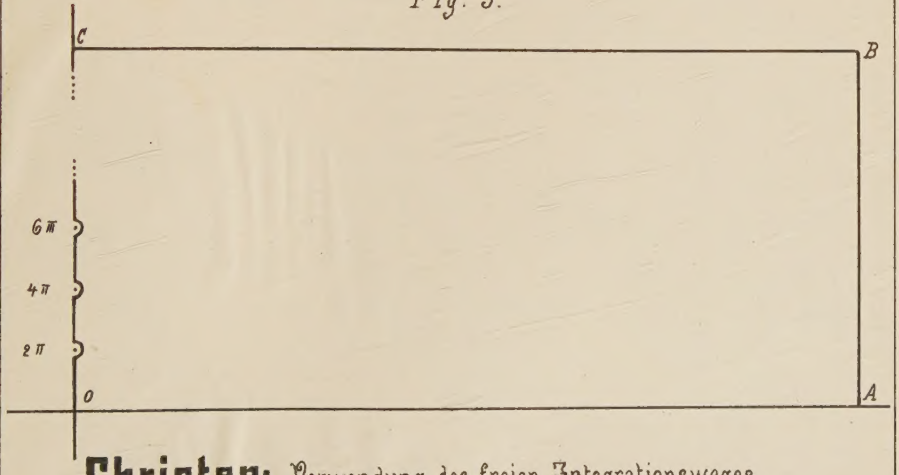
Fig. 3.